הטכניון – הפקולטה למתמטיקה
חדו"א 1מ 104018
מבחן מועד ב סמסטר חורף 28.02.2016

משך המבחן שלוש שעות, ללא חומר עזר (כולל מחשבונים).
במבחן 5 שאלות. יש לפתור את כולן. יש לרשום פתרונות מנומקים, **בעט (לא אדומה)**, על גבי דפים אלו. אין לצרף דפים נוספים או מחברת טיוטה.
למי שלא עשה את בחן אמצע וזכאי לתחליף, ציון שאלה 1 יהיה תחליף לציון בחן האמצע.

בהצלחה

שאלה 1 (20%)

א. (10%) חשבו את הגבול הבא אם הוא קיים.

$$\lim_{x\to 0^+} \sin(x)\ln(x)$$

פתרון:

$$\lim_{x\to 0^+} \sin(x)\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sin(x)}} \underset{\frac{-\infty}{\infty}}{\overset{(L)}{=}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2(x)}{-x\cos(x)} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{(L)}{=}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{-\cos(x)+x\sin(x)} = \frac{0}{-1+0} = 0$$

ב. (10%) הוכיחו כי

$$-\frac{1}{2} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(sin(x))\, dx < 0$$

פתרון: בקטע $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ מתקיים כי $2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin(x) \leq 1$ ולכן

$$-\frac{1}{2}\ln(2) = \ln\left(2^{-\frac{1}{2}}\right) \leq \ln(\sin(x)) \leq 0$$

ולכן

$$-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}\ln(2)\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(sin(x))\, dx \leq 0$$

שאלה 2 (20%)

א. (10%) האם האינטגרל הבא מתכנס?

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$$

פתרון: כיוון שיש בעיה באפס ובאינסוף נפריד לשני אינטגרלים ונרשום

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$$

האינטגרל הראשון: כיוון ש-

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}+x^2}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x^{\frac{3}{2}}} = 1$$

וכיוון שבקטע $(0,1]$ הפונקציות חיוביות אז לפי מבחן ההשוואה הגבולי האינטגרלים

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}, \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

מתכנסים ביחד או מתבדרים ביחד. כיוון שהאינטגרל $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ מתכנס ($p=\frac{1}{2}<1$) אז גם $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$ מתכנס.

האינטגרל השני: כיוון ש-

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}+x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}+1} = 1$$

וכיוון שבקטע $[1,\infty)$ הפונקציות חיוביות אז לפי מבחן ההשוואה הגבולי האינטגרלים

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}, \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$$

מתכנסים ביחד או מתבדרים ביחד. כיוון שהאינטגרל $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ מתכנס ($p=2>1$) אז גם $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$ מתכנס.

לכן האינטגרל $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$ מתכנס.

ב. (10%) האם הטור מתכנס?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{1+n^2}$$

פתרון: לטור אברים חיוביים. נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{1+n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+n^2} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n^2}+1} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

כאשר $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$ נובע מהגבול המפורסם הראשון $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ ומהיינה כאשר $x_n = \frac{1}{n}$.

לפי מבחן ההשוואה הגבולי, הטורים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{1+n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

מתכנסים ביחד או מתבדרים ביחד. כיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס $(p = 2 > 1)$ אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{1+n^2}$ מתכנס.

שאלה 3 (20%)

א. (10%) תהא $f:[0,1]\to[0,1]$ רציפה. הראו כי קיימת נקודה $0\le c\le 1$ עבורה $f(c)=c$.

פתרון: נגדיר $g(x)=f(x)-x$. אזי $g(x)$ רציפה בקטע $[0,1]$ כי היא הפרש של פונקציות רציפות.
כיוון ש-$0\le f(x)\le 1$ לכל $0\le x\le 1$, אז

$$g(0)=f(0)-0\ge 0$$
$$g(1)=f(1)-1\le 0$$

אם $g(0)=0$ אז $f(0)=0$ וניקח $c=0$.
אם $g(1)=0$ אז $f(1)=1$ וניקח $c=1$.
אחרת,

$$g(0)=f(0)-0>0$$
$$g(1)=f(1)-1<0$$

לפי משפט ערך הביניים, כיוון ש- $g(x)$ רציפה בקטע $[0,1]$ וכיוון ש- $g(1)<0<g(0)$, אז קיים $0<c<1$ עבורו $g(c)=0$. כלומר $f(c)=c$.

ב. (10%) נניח שבנוסף להנחות סעיף א' כי f גזירה בקטע $[0,1]$ וכי $|f'(x)| < 1$ לכל $0 \le x \le 1$.
הראו כי קיימת נקודה **יחידה** $0 \le c \le 1$ עבורה $f(c) = c$.

פתרון: הראינו קיום בסעיף הקודם.
כיוון ש-$|f'(x)| < 1$ אז $f'(x) < 1$ לכל $0 \le x \le 1$. לכן

$$g'(x) = f'(x) - 1 < 0$$

לכל $0 \le x \le 1$. נקבל כי $g(x)$ יורדת ממש בקטע $[0,1]$. לכן יש לכל היותר נקודה אחת עבורה $g(c) = 0$ מה שאומר שיש לכל היותר נקודה אחת עבורה $f(c) = c$. כיוון שיש לפחות נקודה אחת כזו, יש בדיוק נקודה אחת.

שאלה 4 (20%)

א. (10%) מצאו את המספר b עבורו הגבול הבא קיים (וסופי)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{x^3}+\frac{b}{x^2}\right)$$

עבור b זה, מהו הגבול?

פתרון:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{x^3}+\frac{b}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)+bx}{x^3}\underset{\frac{0}{0}}{\overset{(L)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)+b}{3x^2}=$$

פה נשים לב כי הגבול של המונה הוא $2+b$ ואם זה אינו אפס, כיוון שהמכנה שואף ל- 0^+ אז הגבול יהיה אינסוף או מינוס אינסוף (בהתאם לסימן של $2+b$). כיוון שאנו רוצים גבול סופי אז בהכרח $b=-2$.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)+b}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)-2}{3x^2}\underset{\frac{0}{0}}{\overset{(L)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{-4\sin(2x)}{6x}\underset{\frac{0}{0}}{\overset{(L)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{-8\cos(2x)}{6}=-\frac{4}{3}$$

ב. (10%) מצאו פולינום טיילור מסדר 2 סביב הנקודה $a = 0$ של

$$F(x) = \int_{tg(2x)}^{e^x-1} \cos(t^2)dt$$

יש לרשום את המקדמים של הפולינום כמספרים.

פתרון:

$$F(0) = \int_0^0 \cos(t^2)dt = 0$$

$$F'(x) = \cos((e^x-1)^2)\, e^x - \cos((tg(2x)^2)\, \frac{2}{\cos^2(2x)} \quad \to F'(0) = -1$$

$$\begin{aligned} F''(x) = &-\sin((e^x-1)^2)\, 2(e^x-1)e^x e^x + \cos((e^x-1)^2)\, e^x \\ &+ \sin\left(\left(tg(2x)\right)^2\right) 2tg(2x) \frac{2}{\cos^2(2x)} \frac{2}{\cos^2(2x)} \\ &+ \cos((tg(2x)^2)\, \frac{2 \cdot 2\cos(2x)\sin(2x)\, 2}{\cos^4(2x)} \to F''(0) = 1 \end{aligned}$$

ולכן

$$T_2(x) = -x + \frac{x^2}{2}$$

שאלה 5 (20%)

א. (12%) נסחו והוכיחו את משפט רול.

ב. (8%) יהיו f, g פונקציות גזירות בקטע $[a, b]$. הוכיחו כי קיים $a < c < b$ עבורו מתקיים

$$g'(c)\big(f(b) - f(a)\big) = f'(c)\big(g(b) - g(a)\big)$$

פתרון: נגדיר

$$h(x) = g(x)\big(f(b) - f(a)\big) - f(x)\big(g(b) - g(a)\big)$$

אז $h(x)$ גזירה בקטע $[a, b]$ מכיוון שהיא הפרש של גזירות, ורציפה ב-$[a, b]$. בנוסף

$$h'(x) = g'(x)\big(f(b) - f(a)\big) - f'(x)\big(g(b) - g(a)\big)$$

$$h(a) = g(a)f(b) - f(a)g(b)$$

$$h(b) = -g(b)f(a) + f(b)g(a) = h(a)$$

ולכן לפי רול יש $a < c < b$ עבורה

$$0 = h'(c) = g'(c)\big(f(b) - f(a)\big) - f'(c)\big(g(b) - g(a)\big)$$

ונקבל כי

$$g'(c)\big(f(b) - f(a)\big) = f'(c)\big(g(b) - g(a)\big)$$